# Transformation de Laplace

## I) Transformée de Laplace des fonctions :

### 1) Déf et existance :

**Déf :**
Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs ds $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle transformée de Laplace de $f$. si elle existe, la fonction de la variable complexe $p$ ( $p \in \mathbb{C}$), noté $F(p)$ ou $\mathcal{L}(f(t))(p)$, définie par

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t))(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

**RQ :**

1) on appelle $f$ l'originale et son transformée de Laplace $F$ l'image

2) pour $t < 0$, les valeurs de $f(t)$ n'interviennet pas dans la déf de la transformée de Laplace de $f$ ;
Alors on suppose que . $f(t) = 0$ si $t < 0$
- on appelle fonction causale une fonction $f$ tq $f(t) = 0$, pour $t < 0$
- pour $f$ une fonction qq on a : $fH$ est causale

avec : $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

3) pour $p \in \mathbb{C}$ on a :

$$|f(t) e^{-pt}| = |f(t)| |e^{-pt}| = |f(t)| e^{-Re(p)t}$$

$$p \in D_f \iff Re(p) \in D_F$$

**Théorème :**
Soit $f$ une fonction loc intég sur $\mathbb{R}_+$, supposons que $f$ est d'ordre exponentiel, ca'd :



Scanned with CamScanner

Alors : la transformée de Laplace de $f$ existe pour $p \in \{ p / \text{Re}(p) > a \}$

**Déf :**

On appelle abscisse de convergence absolue de $f$ le nombre :

$$P_0 = \inf \{ x \in \mathbb{R} / t \longmapsto f(t) e^{-xt} \text{ est intg sur } \mathbb{R}_+ \}$$

**Théorème :**

Soit $f$ une fonction d'abscisse de conv absolue $p_0$, alors la transformée de Laplace de $f$ existe $\forall p \in \mathbb{C} / \text{Re}(p) > P_0$

**RQ :**

$P_0 \in [-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}$

si $P_0 \longrightarrow = -\infty \Rightarrow D_F = \mathbb{C}$

$\quad \longrightarrow = +\infty \Rightarrow D_F = \emptyset$

$\quad \longrightarrow \{ p \in \mathbb{C} / \text{Re}(p) > P_0 \}$

**2) exemples :**

- $\mathcal{L}(H(t))(p) = ?$

$$\mathcal{L}(H)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \left[ -\frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p} \; ; \text{Re}(p) > 0$$

$$\lim_{+\infty} |e^{-pt}| = \lim_{+\infty} e^{-\text{Re}(p)t} \xrightarrow[+\infty]{} 0 \; , \text{Re}(p) > 0$$

- $\mathcal{L}(tH(t))(p) = \int_0^{+\infty} t e^{-pt} dt$

IPP $\begin{cases} t \to 1 \\ e^{-pt} \to \frac{e^{-pt}}{p} \end{cases}$

$$= \left[ -\frac{t e^{-pt}}{p} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \; ; \; \text{Re}(p) > 0$$

$u = t \quad = 1$

$v = e^{-pt} \quad v' = -\frac{e^{-pt}}{p}$

$$= \frac{1}{p} \mathcal{L}(H)(p) = \frac{1}{p^2} \; ; \text{Re}(p) > 0$$



Scanned with CamScanner

$\exists M > 0, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0$ on a : $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$

Alors : la transformée de Laplace de $f$ existe pour $p \in \mathbb{C} / Re(p) > \alpha$

**Déf :**

On appelle abscisse de convergence absolue de $f$

le nombre :

$$p_0 = \inf \{ x \in \mathbb{R} / t \longmapsto f(t) e^{-xt} \text{ est intg sur } \mathbb{R}_+ \}$$

**Théorème :**

Soit $f$ une fonction d'abscisse de conv absolue $p_0$, alors la transformée de Laplace de $f$ existe $\forall p \in \mathbb{C} / Re(p) > p_0$

**RQ :**

$p_0 \in [-\infty, +\infty] = \bar{\mathbb{R}}$

si $p_0 \longrightarrow = -\infty \Rightarrow D_F = \mathbb{C}$

$\hookrightarrow = +\infty \Rightarrow D_F = \emptyset$

$\hookrightarrow \{ p \in \mathbb{C} / Re(p) > p_0 \}$

**2) exemples :**

- $\mathcal{L}(H(t))(p) = ?$

$$\mathcal{L}(H)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \left[ -\frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p} \; ; Re(p) > 0$$

$$\lim_{+\infty} |e^{-pt}| = \lim_{+\infty} e^{-Re(p)t} \longrightarrow 0 \text{ , } Re(p) > 0$$

- $\mathcal{L}(tH(t))(p) = \int_0^{+\infty} t e^{-pt} dt$

IPP : $\begin{cases} t \to 1 \\ e^{-pt} \to \frac{e^{-pt}}{p} \end{cases}$

$$= \left[ -\frac{t e^{-pt}}{p} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \; ; \; Re(p) > 0$$

$$= \frac{1}{p} \mathcal{L}(H)(p) = \frac{1}{p^2} \; ; Re(p) > 0$$

$u = t \quad = 1$

$v = e^{-pt} \quad v' = -\frac{e^{-pt}}{p}$



Scanned with CamScanner

$$\mathcal{L}\left(\underbrace{t^n}_{u'}\underbrace{H(t)}_{u}\right)(p) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt}\,dt \qquad \mathrm{Re}(p) > 0$$

IPP $\begin{cases} t^n \longrightarrow n t^{n-1} \\ e^{-pt} \longrightarrow -\dfrac{e^{-pt}}{p} \end{cases}$ $= \left[\dfrac{-t^n e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty} + \dfrac{n}{p}\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-pt}\,dt$ ($\left[\dfrac{-t^n e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty} = 0$)

$$= \frac{n}{p}\left(\left[\frac{-t^{n-1}e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty} + \frac{(n-1)}{p}\int_0^{+\infty} t^{n-2}e^{-pt}\,dt\right)$$

$$= \frac{n}{p}\frac{n-1}{p}\int_0^{+\infty} t^{n-2}e^{-pt}\,dt$$

$$\vdots$$

$$= \frac{n}{p}\frac{n-1}{p}\frac{(n-2)}{p}\cdots\frac{1}{p}\int_0^{+\infty} t^0 e^{-pt}\,dt$$

$$= \frac{n!}{p^n}\frac{1}{p} = \frac{n!}{p^{n+1}} \quad ; \mathrm{Re}(p) > 0$$

+ pour $a \in \mathbb{C}$, $\mathcal{L}\left(e^{at}H(t)\right)(p) = \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-pt}\,dt$ $= \int_0^{+\infty} e^{t(a-p)}\,dt$

$= \left[\dfrac{e^{t(a-p)}}{a-p}\right]_0^{+\infty}$ $\mathrm{Re}(a-p) < 0$

$\mathrm{R}(a) < \mathrm{Re}(p)$

$= \dfrac{1}{p-a}$ ; $\mathrm{Re}(p) > \mathrm{Re}(a)$.

+ $\mathcal{L}\left(\mathrm{Cost}\,H(t)\right)(p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{Cos}\,t\,e^{-pt}\,dt$

IPP $\begin{cases} \mathrm{Cost} \longrightarrow -\sin t \\ e^{-pt} \longrightarrow -\dfrac{e^{-pt}}{p} \end{cases}$ $= \left[-\dfrac{\mathrm{Cost}\,e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty} - \dfrac{1}{p}\int_0^{+\infty} \sin t\,e^{-pt}\,dt$

IPP $\begin{cases} \sin t \longrightarrow \mathrm{Cost} \\ e^{-pt} \longrightarrow -\dfrac{e^{-pt}}{p} \end{cases}$ $= \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p}\int_0^{+\infty} \sin t\,e^{-pt}\,dt$

$= \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p}\left[\left[-\dfrac{\sin t\,e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty} + \dfrac{1}{p}\int_0^{+\infty} \mathrm{Cost}\,e^{-pt}\,dt\right]$ ($\left[-\dfrac{\sin t\,e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty} = 0$)

$= \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2}\mathcal{L}\left(\mathrm{Cost}\right)(p)$

$\Rightarrow \mathcal{L}\left(\mathrm{Cost}\,H(t)\right)(p)\left[1 + \dfrac{1}{p^2}\right] = \dfrac{1}{p}$

$\Rightarrow \mathcal{L}\left(\mathrm{Cost}\,H(t)\right)(p) = \dfrac{p}{1+p^2}$ ; $\mathrm{Re}(p) > 0$



Scanned with CamScanner

$$= \frac{1}{p^2+1} \quad ; \mathrm{Re}(p) > 0$$

3) Lien entre transformée de Laplace et la transformée de Fourier :

soit $f$ une fonction d'abscisse de convergence absolue $p_0$.

(car $\forall p \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(p) > p_0$, $F(p)$ existe)

Alors la fonction :

$$t \longmapsto f(t) H(t) e^{-pt} \text{ est intg sur } \mathbb{R} \quad \forall p / \mathrm{Re}(p) > p_0$$

Alors :

pour $p = (\mathrm{Re}(p) + 2i\pi w) \in \mathbb{C}$

on a :

$$F(\overbrace{\mathrm{Re}(p) + 2i\pi w}^{p}) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(\mathrm{Re}(p) + 2i\pi w)t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) f(t) e^{-\mathrm{Re}(p)t} e^{-2i\pi w t} dt$$

$$= \overbrace{\mathcal{F}}^{\text{fourier}} (f(t) e^{-\mathrm{Re}(p)t} H(t))(w)$$

En particulier :

$$F(2i\pi w) = \mathcal{F}(f(t) H(t))(w)$$

$$F(iw) = \mathcal{L}(f(t))(iw) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-iwt} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) H(t) e^{-2i\pi \left(\frac{w}{2\pi}\right) t} dt$$

$$= \mathcal{F}(f H)\left(\frac{w}{2\pi}\right)$$

RQ :

1) Ds la plupart des exemples la variable $p$ de $F(p)$ est ds $\mathbb{R}$, pour cela on prend ds la suite, $p \in \mathbb{R}$, $F(p)$.



Scanned with CamScanner

$= \frac{1}{p^n+1}$ ; $Re(p)>0$

3) Lien entre transformée de Laplace et la transformée de Fourier :

Soit $f$ une fonction d'abscisse de convergence absolue $p_0$.

(ca'd $F(p)$ existe, $\forall p \in \mathbb{C}$, $Re(p)>p_0$)

Alors la fonction :

$t \longmapsto f(t)H(t)e^{-pt}$ est intg sur $\mathbb{R}$ $\forall p$ / $Re(p)>p_0$

Alors :

pour $p = (Re(p) + 2i\pi w) \in \mathbb{C}$

on a :

$$F(\overbrace{Re(p)+2i\pi w}^{p}) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(Re(p)+2i\pi w)t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) f(t) e^{-Re(p)t} e^{-2i\pi w t}\,dt$$

$$= \overbrace{\mathcal{F}}^{\text{fourier}}(f(t)e^{-Re(p)t}H(t))(w)$$

En particulier :

$$F(2i\pi w) = \mathcal{F}(f(t)H(t))(w)$$

$$F(iw) = \mathcal{L}(f(t))(iw) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-iwt}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)H(t)e^{-2i\pi\left(\frac{w}{2\pi}\right)t}\,dt$$

$$= \mathcal{F}(fH)\left(\frac{w}{2\pi}\right)$$

RQ :

1) Ds la plupart des exemples la variable $p$ de $F(p)$ est ds $\mathbb{R}$, pour cela on prend ds la suite, $p \in \mathbb{R}$, $F(p)$.



Scanned with CamScanner

4] Propriétés de la transformée de Laplace :

1) $\mathcal{L}((f+g)(t))(p) = \mathcal{L}(f)(p) + \mathcal{L}(g)(p)$

$\mathcal{L}(\alpha f)(p) = \alpha \mathcal{L}(f)(p)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Exemple :

$\mathcal{L}((1 + \cos t) H(t))(p) = \mathcal{L}(1)(p) + \mathcal{L}(\cos t)(p)$

$= \frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2+1}$

2) Pour $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(e^{at} f(t) H(t))(p) = \mathcal{L}(f(t))(p-a)$

Dém :

$\mathcal{L}(e^{at} f(t))(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{at} e^{-pt} dt$ $(p > p_0 + a)$

$= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = \mathcal{L}(f(t))(p-a)$

Exemple :

- $\mathcal{L}(e^{2t} \cos t)(p) = \mathcal{L}(\cos t)(p-2) = \frac{p-2}{(p-2)^2+1}$
- $\mathcal{L}(e^{-3t} t^3)(p) = \mathcal{L}(t^3)(p+3) = \frac{3!}{(p+3)^4}$ $p > -3$

3) soit $a > 0$, $\mathcal{L}(f(at))(p) =$

Dém :

$\mathcal{L}(f(at))(p) = \int_0^{+\infty} f(at) e^{-pt} dt$

$y = at$ $\left( = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(y) e^{-\frac{p}{a} y} dy = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) ; p > \right.$

Exemple :

- $\mathcal{L}(\cos(\omega t))(p) = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}(\cos t)\left(\frac{p}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega} \frac{\frac{p}{\omega}}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1}$ (f

$= \frac{p}{p^2 + \omega^2}$

- $\mathcal{L}(\sin(\omega t))(p) = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}(\sin t)\left(\frac{p}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega} \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1}$

$= \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ avec $p > 0$



Scanned with CamScanner

4) pour $t_0 > 0$, $\mathcal{L}(f(t-t_0)H(t-t_0))(p) = e^{-pt_0}F(p) = e^{-pt_0}\mathcal{L}($

Déno

$$\mathcal{L}(f(t-t_0)H(t-t_0))(p) = \int_{t_0}^{+\infty} f(t-t_0)e^{-pt}dt \; ; p > p_0$$

$$\left.\begin{array}{l} y = t-t_0 \\ \end{array}\right| = \int_0^{+\infty} f(y)e^{-p(y+t_0)}dy$$

$$= e^{-pt_0}F(p)$$

Exemple:

Calculer $\mathcal{L}(f)$ et $\mathcal{L}(g)$ avec :

$f(t) = (t-1)^2$, $t \geq 0$ et $g(t) = (t-1)^2$, $t \geq 1$

$$\mathcal{L}(f)(p) = \mathcal{L}(t^2 - 2t + 1)(p) = \mathcal{L}(t^2)(p) + \mathcal{L}(1)(p) - 2\mathcal{L}(t)(p)$$

$$= \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p} - \frac{2}{p^2}$$

$$\mathcal{L}(g(t))(p) = \mathcal{L}((t-1)^2 H(t-1))(p) = e^{-p}\mathcal{L}(t^2)(p)$$

$$= e^{-p}\frac{2}{p^3} = \frac{2e^{-p}}{p^3}$$

5) si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ tq $f(0^+)$ existe et $f(M,\alpha) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ /

$\forall t \geq 0$, $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$

Alors :

$\mathcal{L}(f')$ est bien définie pour $p > \alpha$ et on a :

$$\mathcal{L}(f'(t))(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0^+)$$

Déno

$$\mathcal{L}(f'(t))(p) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt$$

$$= [fe^{-pt}]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}$$

IPP : $f' \longrightarrow f$, $e^{-pt} \longrightarrow -pe^{-pt}$

$$= \lim_{+\infty} f(t)e^{-pt} - f(0^+) + p\mathcal{L}(f)(p)$$

$\Rightarrow |f(t)e^{-pt}| \leq Me^{\alpha t}e^{-pt} = Me^{-(p-\alpha)t} \xrightarrow{t \to +\infty} 0$ (1°)

$$= p\mathcal{L}(f)(p) - f(0^+)$$



Scanned with CamScanner

- $\mathcal{L}(f''(t))(p) = \mathcal{L}((f')')(p) = p\,\mathcal{L}(f'(t))(p) - f'(0^+)$

$= p\left[p\,\mathcal{L}(f)(p) - f(0^+)\right] - f'(0^+)$

$= p^2\mathcal{L}(f)(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$

- $\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right)(p) = p^n\mathcal{L}(f)(p) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}f'(0^+) -$

$p^{n-3}f''(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+)$

$= p^n\mathcal{L}(f)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k f^{(n-1-k)}(0^+)$

Exc 6

On pose :

$f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$

Calculer $f^{(k)}(t)$ $\forall k \in \{0, \dots, n\}$ et en déduire $\mathcal{L}(f)(p)$

Sol

pour $f(t) = t^n$ ; $n \in \mathbb{N}$

$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$ et on a :

$f'(t) = n\,t^{n-1}$ ; $f''(t) = n(n-1)t^{n-2}$

$f^{(3)}(t) = n(n-1)(n-2)t^{n-3}$

$\vdots$

$\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $f^{(k)}(t) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)t^{n-k}$

$= \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\cdots 1}{(n-k)!}\,t^{n-k}$

Alors :

$f^{(k)}(t) = \dfrac{n!}{(n-k)!}t^{n-k}$, $\forall\, 0 \leq k \leq n$

pour $k = n$ ; $f^{(n)}(t) = n!$

Alors :

$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right)(p) = \mathcal{L}(n!)(p) = n!\,\mathcal{L}(H)(p) = n!\,\dfrac{1}{p}$

(7

Scanned with CamScanner

$$p^n \mathcal{L}(f)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k \cdot f^{(n-1-k)}(0)$$

or $f^{(n-1-k)}(0) = 0$

pour $0 \leq k \leq n-1$

Donc $n! \frac{1}{p} = p^n \mathcal{L}(f)(p) \Rightarrow \mathcal{L}(f)(p) = \frac{n!}{p} \frac{1}{p^n} = \frac{n!}{p^{n+1}}$

Propriétés :

Soit $f$ une fonction

Scanned with CamScanner

## II) Transformée de Laplace de distributions :

**Déf°**

soit $T$ une distribution à support dans $\mathbb{R}_+$

(on note $T \in \mathcal{D}_+'(\mathbb{R})$)

On appelle transformée de Laplace de $T$, et on note $\mathcal{L}(T)$, l'application définie par :

$$\mathcal{L}(T)(p) = \langle T, e^{-pt} \rangle$$

Exemples :

1) $\mathcal{L}(T_H)(p) = \langle T_H, e^{-pt} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) e^{-px} dx$

$= \int_0^{+\infty} e^{-px} dx = \left[ -\frac{e^{-px}}{p} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$

2) $\mathcal{L}(\delta)(p) = \langle \delta, e^{-pt} \rangle = e^0 = 1$

$\Rightarrow \mathcal{L}(\delta)(p) = 1$

3) $\mathcal{L}(e^{ax} T_H)(p) = \langle e^{ax} T_H, e^{-px} \rangle = \langle T_H, e^{ax} e^{-px} \rangle$

$= \langle T_H, e^{(a-p)x} \rangle = \int_0^{+\infty} e^{(a-p)x} dx = \frac{1}{p-a}$

4) $\mathcal{L}(\cos x \, T_H)(p) = \langle \cos x \, T_H, e^{-px} \rangle$

$= \langle T_H, \cos x \, e^{-px} \rangle = \int_0^{+\infty} \cos e^{-px} dx$

$= \mathcal{L}(\cos x)(p) = \frac{p}{p^2+1}$

**Proposition :**

soit $T \in \mathcal{D}_+'(\mathbb{R})$ une dist qui admet une transformée de Laplace.

Alors on a :

1) $\mathcal{L}(T^{(n)})(p) = p^n \mathcal{L}(T)(p)$

2) $(\mathcal{L}(T)(p))^{(n)} = \mathcal{L}((-x)^n T)(p)$

3) $\mathcal{L}(S * T)(p) = \mathcal{L}(S)(p) \mathcal{L}(T)(p) \quad \forall S, T \in \mathcal{D}_+'(\mathbb{R})$

4) $\mathcal{L}(T(x-a))(p) = e^{-ap} \mathcal{L}(T)(p)$

5) $\mathcal{L}(T(ax))(p) = \frac{1}{|a|} \mathcal{L}(T)\left(\frac{p}{a}\right)$

Scanned with CamScanner

6) $\mathcal{L}(e^{ax}T)(p) = \mathcal{L}(T)(p-a)$

Donc

2) $\mathcal{L}((-x)^n T)(p) = \langle (-x)^n T, e^{-px} \rangle = \langle T, (-x)^n e^{-px} \rangle$

$= \langle T, \frac{\partial^n}{\partial p^n}(e^{-px}) \rangle = \frac{\partial^n}{\partial p^n} \langle T, e^{-px} \rangle$

$= (\mathcal{L}(T)(p))^{(n)}$

3) $\mathcal{L}(S * T)(p) = \langle S * T, e^{-px} \rangle = \langle S_x, \langle T_y, e^{-p(x+y)} \rangle \rangle$

$= \langle S_x, \langle T_y, e^{-px} e^{-py} \rangle \rangle$

$= \langle S_x e^{-px}, \langle T_y, e^{-py} \rangle \rangle = \mathcal{L}(S)(p)\,\mathcal{L}(T)(p)$

5) $\mathcal{L}(T(ax))(p) = \langle T_{(ax)}, e^{-px} \rangle$

$= \frac{1}{|a|} \langle T, e^{-p(\frac{x}{a})} \rangle$

$= \frac{1}{|a|} \langle T, e^{-\frac{p}{a}x} \rangle = \frac{1}{|a|} \mathcal{L}(T)\left(\frac{p}{a}\right)$

4) $\mathcal{L}(T(x-a))(p) = \langle T(x-a), e^{-px} \rangle$

$= \langle T, e^{-p(x+a)} \rangle$

$= \langle T, e^{-px} e^{-pa} \rangle$

$= e^{-pa} \langle T, e^{-px} \rangle$

$= e^{-pa} \mathcal{L}(T)(p)$

6) $\mathcal{L}(e^{ax}T)(p) = \langle e^{ax}T, e^{-px} \rangle = \langle T, e^{ax} e^{-px} \rangle$

$= \langle T, e^{(p-a)x} \rangle = \mathcal{L}(T)(p-a)$

1) $\mathcal{L}(T^{(n)})(p) = \langle T^{(n)}, e^{-px} \rangle = (-1)^n \langle T, (e^{-px})^{(n)} \rangle$

$= (-1)^n \langle T, (-p)^n e^{-px} \rangle = \langle p^n T, e^{-px} \rangle$

$= p^n \mathcal{L}(T)(p)$

Scanned with CamScanner

Exemple :

$\mathcal{L}(\delta') = ?$

$\mathcal{L}(\delta') = p\mathcal{L}(\delta)(p) = p \times 1 = p$

Applic

Résoudre dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ l'éq diff suivante à l'aide de la T.L :

$(E) : T' + 2T + T_H * T = \delta$

Sol :

$(E) \Leftrightarrow \mathcal{L}(T')(p) + 2\mathcal{L}(T)(p) + \mathcal{L}(T_H * T)(p) = \mathcal{L}(\delta)(p)$

$\Leftrightarrow p\mathcal{L}(T)(p) + 2\mathcal{L}(T)(p) + \mathcal{L}(T_H)(p)\mathcal{L}(T)(p) = 1$ ($\mathcal{L}(T_H) = \frac{1}{p}$)

$\Leftrightarrow \left[p + 2 + \frac{1}{p}\right]\mathcal{L}(T)(p) = 1$

($p + 2 + \frac{1}{p} = \frac{p^2+2p+1}{p}$)

$\Leftrightarrow \mathcal{L}(T)(p) = \frac{p}{p^2+2p+1} = \frac{p}{(p+1)^2} = \frac{p+1-1}{(p+1)^2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2}$

$= \frac{1}{p+1} + \left(\frac{1}{p+1}\right)' = \mathcal{L}(e^{-x}T_H)(p) + \left(\mathcal{L}(e^{-x}T_H)(p)\right)'$

($T_{e^{-x}H}$)

$= \mathcal{L}(e^{-x}T_H)(p) \times \mathcal{L}(-x e^{-x}T_H)(p)$

$= \mathcal{L}(e^{-x}T_H * -x e^{-x}T_H)(p)$

Alors : $T = e^{-x}T_H - x e^{-x}T_H$

App 2 :

1) Calculer $\mathcal{L}(\sin x\, T_H)$ et $\mathcal{L}(\cos x\, T_H)$

2) En déduire $\mathcal{L}(\sin x\, T_H * \cos x\, T_H)$

3) Sans calculer l'intégrale, Déterminer $\sin x\, T_H * \cos x\, T_H$

4) Résoudre :

$(E') : T^{(4)} + 2T'' + T = \delta'$

Sol :

1) $\mathcal{L}(\sin x\, T_H)(p) = \langle \sin x\, T_H, e^{-px} \rangle = \langle T_H, \sin x\, e^{-px} \rangle$

$= \int_0^{+\infty} \sin x\, e^{-px}\, dx = \mathcal{L}(\sin x)(p) = \frac{1}{p^2+1}$



Scanned with CamScanner

$\mathcal{L}(\cos x\, T_H)(p) = \langle \cos x\, T_H, e^{-px} \rangle = \langle T_H, \cos x\, e^{-px} \rangle = \int_0^{+\infty} \cos x\, e^{-px}\, dx$

$= \frac{p}{p^2+1}$

2) $\mathcal{L}(\sin x\, T_H * \cos x\, T_H)(p) = \mathcal{L}(\sin x\, T_H)(p)\, \mathcal{L}(\cos T_H)(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2}$

3) $\sin x\, T_H * \cos x\, T_H = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{(p^2+1)^2}\right) \overset{\uparrow}{=} \frac{x}{2} \sin x\, T_H$

avec $\frac{p}{(p^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{-2p}{(p^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)' = -\frac{1}{2}\left(\mathcal{L}(\sin T_H)(p)\right)'$

$= -\frac{1}{2}\mathcal{L}(-x \sin x\, T_H)(p) = \mathcal{L}\left(\frac{x}{2} \sin T_H\right)(p)$

4) $(E)$ $\mathcal{T}^{(4)} + 2T'' + T = \delta'$

$\Leftrightarrow p^4 \mathcal{L}(T)(p) + 2p^2 \mathcal{L}(T)(p) + \mathcal{L}(T)(p) = \mathcal{L}(\delta')(p)$

$= p\mathcal{L}(\delta)(p) = p$

$\Leftrightarrow (p^4 + 2p^2 + 1)\mathcal{L}(T)(p) = p$

$\mathcal{L}(T)(p) = \frac{p}{p^4+2p^2+1} = \frac{p}{(p^2+1)^2}$

Alors $T = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{(p^2+1)^2}\right) = \frac{x}{2} \sin x\, T_H$.



Scanned with CamScanner

$\mathcal{L}(\cos x T_H)(p) = \langle \cos x T_H, e^{-px} \rangle = \langle T_H, \cos x\, e^{-px} \rangle_0$

$= \frac{p}{p^2+1}$

2) $\mathcal{L}(\sin x T_H * \cos x T_H)(p) = \mathcal{L}(\sin x T_H)(p)\, \mathcal{L}(\cos T_H)(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2}$

3) $\sin x T_H * \cos x T_H = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{(p^2+1)^2}\right) = \frac{x}{2} \sin x T_H$

avec $\frac{p}{(p^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{-2p}{(p^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)' = -\frac{1}{2}\left(\mathcal{L}(\sin T_H)(p)\right)'$

$= -\frac{1}{2}\mathcal{L}(-x \sin x T_H)(p) = \mathcal{L}\left(\frac{x}{2} \sin T_H\right)(p)$

4) $(E)$ $\mathcal{L}T'' + 2T'' + T = \delta'$

$\Leftrightarrow p^4 \mathcal{L}(T)(p) + 2p^2 \mathcal{L}(T)(p) + \mathcal{L}(T)(p) = \mathcal{L}(\delta')(p)$

$= p\mathcal{L}(\delta)(p) = p$

$\Leftrightarrow (p^4 + 2p^2 + 1)\mathcal{L}(T)(p) = p$

$\mathcal{L}(T)(p) = \frac{p}{p^4+2p^2+1} = \frac{p}{(p^2+1)^2}$

Alors $T = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{(p^2+1)^2}\right) = \frac{x}{2} \sin x T_H$



Scanned with CamScanner

# Correction TD 4

## Exo 1

1) a) $F(X) = \dfrac{X+13}{X^2+2X-8}$

$\Delta = 4 - 4(-8) = 36 = 6^2$ et $x_1 = -4 \quad x_2 = 2$

$x^2+2x-8 = (x+4)(x-2)$

$\Rightarrow F(X) = \dfrac{X+13}{(X+4)(X-2)} = \dfrac{a}{X+4} + \dfrac{b}{X-2}$

avec $a = (X+4)F(X)\big|_{X=-4} = \dfrac{-9}{6} = \dfrac{-3}{2}$

$b = (X-2)F\big|_{X=2} = \dfrac{15}{6} = \dfrac{5}{2}$

$F(X) = \dfrac{5}{2(X-2)} - \dfrac{3}{2(X+4)}$

b) $G(X) = \dfrac{2X-1}{X^2+2X-8} = \dfrac{2X-1}{(X+4)(X-2)} = \dfrac{\alpha}{X+4} + \dfrac{\beta}{X-2}$

avec $\alpha = (X+4)G\big|_{X=-4} = \dfrac{3}{2}$

$\beta = (X-2)G\big|_{X=2} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$G(X) = \dfrac{3}{2(X+4)} + \dfrac{1}{2(X-2)}$

2) $(S)\begin{cases} x'(t) = x(t) - 5y(t) = 0 \\ y'(t) - x(t) - 3y(t) = 0 \end{cases}$ avec $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} p\mathcal{L}(x)(p) - x(0) - \mathcal{L}(x)(p) - 5\mathcal{L}(y)(p) = 0 \\ p\mathcal{L}(y)(p) - y(0) + 3\mathcal{L}(y)(p) - \mathcal{L}(x)(p) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (p-1)\mathcal{L}(x)(p) - 5\mathcal{L}(y)(p) = 1 \quad (1) \\ (p+3)\mathcal{L}(y)(p) - \mathcal{L}(x)(p) = 2 \quad (2) \end{cases}$

$(1)(p+3) + (2)5$ donne :

$[(p+3)(p-1) - 5]\mathcal{L}(x)(p) = p+3+10$

$\Rightarrow \mathcal{L}(x)(p) = \dfrac{p+13}{p^2+2p-8} F(p)$



Scanned with CamScanner

(2) (p-1) + (1) donne :

$$[(p+3)(p-1)-5]\mathcal{L}(y)(p) = 2(p-1)+1$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(y)(p) = \frac{2p-1}{p^2+2p-8} = G(p)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x)(p) = F(p) = -\frac{3}{2}\frac{1}{p+4} + \frac{5}{2}\frac{1}{p-2} \\ \mathcal{L}(y)(p) = G(p) = \frac{3}{2}\frac{1}{p+4} + \frac{1}{2}\frac{1}{p-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = -\frac{3}{2}e^{-4t}H(t) + \frac{5}{2}e^{2t}H(t) \\ y(t) = \frac{3}{2}e^{-4t}H(t) + \frac{1}{2}e^{2t}H(t) = \frac{1}{2}e^{2t}\left[1+3e^{-6t}\right]H(t) \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

# Correction TD N°3

**Exo 3 :**

$$g(t) = e^{-|t|}$$

1) $g \in L^1(\mathbb{R})$ et on a :

$$\hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-2i\pi t x}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-2i\pi t x}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t| - 2i\pi t x}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t(1-2i\pi x)}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t(1+2i\pi x)}\, dt$$

$$= \left[ \frac{e^{t(1-2i\pi x)}}{1-2i\pi x} \right]_{-\infty}^{0} + \left[ \frac{-e^{-t(1+2i\pi x)}}{1+2i\pi x} \right]_{0}^{+\infty}$$

$$\begin{cases} \lim_{-\infty} e^{t(1-2i\pi x)} = 0 \text{ car } \left| e^{t(1-2i\pi x)} \right| = e^{t} \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0 \\ \text{et} \\ \lim_{+\infty} e^{-t(1+2i\pi x)} = 0 \text{ car } \left| e^{-t(1+2i\pi x)} \right| = e^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \end{cases}$$

Alors :

$$\hat{g}(x) = \frac{1}{1-2i\pi x} + \frac{1}{1+2i\pi x} = \frac{2}{1+4\pi^2 x^2}$$

2) a) on a $g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ de plus $g$ est continue sur $\mathbb{R}$,

Alors avec la formule d'inversion de Fourier, on a :

$$g(x) = F^{-1}(F(g))(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(t)\, e^{2i\pi t x}\, dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-|x|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+4\pi^2 t^2} e^{2i\pi t x}\, dt$$

on pose : $y = 2\pi t$, $dy = 2\pi\, dt$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+y^2} e^{2i\pi \frac{y}{2\pi} x}\, dy \Leftrightarrow e^{-|x|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} e^{-2i\pi y\left(\frac{-x}{2\pi}\right)}\, dy$$

$$= \frac{1}{\pi} \overline{F(h(y))}\left(\frac{-x}{2\pi}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



Scanned with CamScanner

$\Rightarrow \mathcal{F}(h(y))\left(\frac{-x}{2\pi}\right) = \pi e^{-|x|}$

on pose $X = \frac{-x}{2\pi}$

$\mathcal{F}(h(y))(x) = \pi e^{-2\pi|x|} = \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)(x)$

b) $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}\,dx = ? \; ; \; \alpha \in \mathbb{R}$

Comme $h$ est paire, Alors on a

$\pi e^{-2\pi|x|} = \hat{h}(x) = 2\int_0^{+\infty} h(t)\cos(2\pi t x)\,dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2\pi t x)}{1+t^2}\,dt$ $\forall x \in \mathbb{R}$

pour $\alpha = 2\pi x$

$\Leftrightarrow \pi e^{-2\pi\left|\frac{\alpha}{2\pi}\right|} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha t)}{1+t^2}\,dt$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha t)}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}, \; \alpha \in \mathbb{R}$

3) $K(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2}$ ; $K^{*n}(x) = ?$

i) on a $(g*g)(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,g(-x-t)\,dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,g(x+t)\,dt$ ) $g$ est paire

$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(-t)\,g(x-t)\,dt$ ) $t = -t$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,g(x-t)\,dt = (g*g)(x)$ ) $g$ paire

ii) Si $x \geq 0$ ; on a

$(g*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,g(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-|x-t|}\,dt$

$= \int_{-\infty}^{0} e^{t} e^{-(x-t)}\,dt + \int_0^x e^{-t} e^{-(x-t)}\,dt + \int_x^{+\infty} e^{-t} e^{x-t}\,dt$

$= e^{-x}\int_{-\infty}^{0} e^{2t}\,dt + e^{-x}\int_0^x e^{0}\,dt + e^{x}\int_x^{+\infty} e^{-2t}\,dt$



Scanned with CamScanner

$$= e^{-x}\left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_{-\infty}^{0} + e^{-x}x + e^{x}\left[\frac{e^{-2t}}{-2}\right]_{x}^{+\infty} = \frac{e^{-x}}{2} + xe^{-x} + \frac{e^{-x}}{2}$$

$$= e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}[1+x]$$

3i) si $x \leq 0$ on a

$$(g*g)(x) \overset{\text{pair}}{=} (g*g)(-x) = e^{x}(1-x)$$

Donc $(g*g)(x) = \begin{cases} e^{-x}(1+x) & \text{si } x \geq 0 \\ e^{x}(1-x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (g*g)(x) = e^{-|x|}(1+|x|);\ x \in \mathbb{R}$$

b) on a $(g*g) \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{g}*\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$

et de plus $(g*g)$ est continue

Alors avec le T.F inverse

$$(g*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{g}*\hat{g})(x)\, e^{2i\pi tx}\, dt\ ;\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow e^{-|x|}(1+|x|) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2}{1+4\pi^2t^2}\right)^2 e^{2i\pi tx}\, dt \quad ; \text{ on pose } \begin{cases} z = 2\pi t \\ dz = 2\pi\, dt \end{cases}$$

$$= \frac{4}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+z^2}\right)^2 e^{-2i\pi z\left(\frac{-x}{2\pi}\right)}\, dz$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(K(z))\left(\frac{-x}{2\pi}\right) = \frac{\pi}{2}\, e^{-|x|}(1+|x|)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(K(z))(x) = \frac{\pi}{2}\, e^{-2\pi|x|}(1+2\pi|x|) \qquad \left(\text{il } X = \frac{-x}{2\pi}\right)$$

4) on a $h \in \varphi'$ et $h'(t) = \left(\frac{1}{1+t^2}\right)' = \frac{-2t}{(1+t^2)^2} = -2\varphi(t)$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(h'(t))(x) = \mathcal{F}(-2\varphi(t))(x)$$

$$(2i\pi x)\hat{h}(x) \qquad = -2\hat{\varphi}(x)$$



Scanned with CamScanner

# II Transformé de Laplace de distributions

**Def :**
Soit $T$ une distribution à support dans $\mathbb{R}_+$ (on note $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$)
On appelle transformé de Laplace de $T$, et on note $\mathcal{L}(T)$, l'application définie par :

$$\mathcal{L}(T)(p) = \langle T, e^{-px} \rangle$$

**exp :**

1/ $\mathcal{L}(T_H) = ?$

on a $\mathcal{L}(T_H)(p) = \langle T_H, e^{-px} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) e^{-px} dx = \int_0^{+\infty} e^{-px} dx =$

$$= \left[ -\frac{e^{-px}}{p} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

2/ $\mathcal{L}(\delta) = ?$

$\mathcal{L}(\delta)(p) = \langle \delta, e^{-px} \rangle = e^0 = 1$

3/ $\mathcal{L}(e^{ax} T_H) = ?$

on a $\mathcal{L}(e^{ax} T_H)(p) = \langle e^{ax} T_H, e^{-px} \rangle = \langle T_H, e^{ax} e^{-px} \rangle = \langle T_H, e^{(a-p)x} \rangle$

$$= \int_0^{+\infty} e^{(a-p)x} dx = \frac{1}{p-a}$$

4/ $\mathcal{L}(\cos x \, T_H) = ?$

$$\mathcal{L}(\cos x \, T_H)(p) = \langle \cos x \, T_H, e^{-px} \rangle = \langle T_H, \cos x \, e^{-px} \rangle =$$

$$= \int_0^{+\infty} \cos x \, e^{-px} dx = \mathcal{L}(\cos)(p) = \frac{p}{p^2+1}$$

**proposition :**
Soit $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une dist qui admet une transformé de Laplace, Alors on a

1/ $\mathcal{L}(T^{(n)})(p) = p^n \mathcal{L}(T)(p)$

2/ $(\mathcal{L}(T)(p))^{(n)} = \mathcal{L}((-x)^n T)(p)$

3/ $\mathcal{L}(S * T)(p) = \mathcal{L}(S)(p) \cdot \mathcal{L}(T)(p)$. $\forall S, T \in \mathcal{D}_+(\mathbb{R})$

4/ $\mathcal{L}(T(x-a))(p) = e^{-ap} \mathcal{L}(T)(p)$

5/ $\mathcal{L}(T(ax))(p) = \frac{1}{|a|} \mathcal{L}(T)\left(\frac{p}{a}\right)$

6/ $\mathcal{L}(e^{ax} T)(p) = \mathcal{L}(T)(p-a)$

**Dem :**

② $(\mathcal{L}(T)(p))^{(n)} = \mathcal{L}((-x)^n T) = \langle (-x)^n T, e^{-px} \rangle = \langle T, (-x)^n e^{-px} \rangle$

$$= \langle T, \frac{\partial^n}{\partial p} (e^{-px}) \rangle = \frac{\partial^n}{\partial p} \langle T, e^{-px} \rangle \quad (\mathcal{L}(T)(p))^{(n)}$$

③ $\mathcal{L}(S*T)(p) = \langle S*T, e^{-px} \rangle = \langle S_x, \langle T_y, e^{-p(x+y)} \rangle \rangle$

$$= \langle S_x \langle T_y, e^{-px} e^{-py} \rangle \rangle = \langle S_x, e^{-px} \rangle \langle T_y, e^{-py} \rangle$$

$$= \mathcal{L}(S)(p) \cdot \mathcal{L}(T)(p)$$

⑤ $\mathcal{L}(T(ax))(p) = \langle T(ax), e^{-px} \rangle = \frac{1}{|a|} \langle T, e^{-\frac{p}{a}x} \rangle$

$$= \frac{1}{|a|} \langle T, e^{-\frac{p}{a}x} \rangle = \frac{1}{|a|} \mathcal{L}(T)\left(\frac{p}{a}\right)$$

④ $\mathcal{L}(T(x-a))(p) = \langle T(x-a), e^{-px} \rangle = \langle T, e^{-p(x+a)} \rangle$

$\overline{aT}$

$$= \langle T, e^{-px} e^{-pa} \rangle = e^{-pa} \langle T, e^{-px} \rangle$$

$$= e^{-pa} \mathcal{L}(T)(p)$$

⑥ $\mathcal{L}(e^{ax} T)(p) = \langle e^{ax} T, e^{-px} \rangle = \langle T, e^{ax} e^{-px} \rangle =$

$$\langle T, e^{-(p-a)x} \rangle = \mathcal{L}(T)(p-a)$$

① $\mathcal{L}(T^{(n)})(p) = \langle T^{(n)}, e^{-px} \rangle = (-1)^n \langle T, (e^{-px})^{(n)} \rangle =$

$$(-1)^n \langle T, (-p)^n e^{-px} \rangle = \langle p^n T, e^{-px} \rangle =$$

$$= p^n \mathcal{L}(T)(p).$$

**exp :**

$\mathcal{L}(\delta')$ ? $\mathcal{L}(\delta')(p) = p \mathcal{L}(\delta)(p) = p \cdot 1 = p$

**App :** Resoudre dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ l'equation diff suivante à l'aide de la TL.

$(E) = T' + 2T + T_H * T = \delta$

$(E) \Leftrightarrow \mathcal{L}(T')(p) + 2\mathcal{L}(T)(p) + \mathcal{L}(T_H * T)(p) = \mathcal{L}(\delta)(p)$

$$p\mathcal{L}(T)(p) + 2\mathcal{L}(T)(p) + \mathcal{L}(T_H)(p)\mathcal{L}(T)(p) = 1$$

$$\left(p + 2 + \frac{1}{p}\right)\mathcal{L}(T)(p) = 1$$

$\frac{p^2+2p+1}{p}$

$$\mathcal{L}(T)(p) = \frac{p}{p^2+2p+1} = \frac{p}{(p+1)^2}$$

$$\mathcal{L}(T)(p) = \frac{p}{(p+1)^2} = \frac{p+1-1}{(p+1)^2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2}$$

$$= \frac{1}{p+1} + \left(\frac{1}{p+1}\right)'$$

$$= \mathcal{L}(e^{-x} T_H)(p) + \left(\mathcal{L}(e^{-x} T_H)(p)\right)'$$

$$= \mathcal{L}(e^{-x} T_H)(p) + \mathcal{L}(t \, e^{-x} T_H)(p)$$

$$= \mathcal{L}(e^{-x} T_H + t e^{-x} T_H)(p)$$

Alors $T = e^{-x} T_H - x e^{-x} T_H$

**App 2 :**

1/ Calculer $\mathcal{L}(\sin x \, T_H)$ et $\mathcal{L}(\cos x \, T_H)$

2/ En déduire $\mathcal{L}(\sin x \, T_H * \cos x \, T_H)$

3/ sans calculer l'intégral, Déterminer.

$\sin x \, T_H * \cos x \, T_H$

4/ Resoudre :

$(E) : T^{(4)} + 2T'' + T = \delta'$

Scanned with CamScanner

## II Transformé de Laplace de distributions

**Def :**
Soit $T$ une distribution à support dans $\mathbb{R}_+$ (on note $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$)
On appelle transformé de Laplace de $T$, et on note $\mathcal{L}(T)$, l'application définie par :
$\mathcal{L}(T)(p) = \langle T, e^{-px} \rangle$

**exp :**
1/ $\mathcal{L}(T_H) = ?$
on a $\mathcal{L}(T_H)(p) = \langle T_H, e^{-px} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) e^{-px} dx = \int_0^{+\infty} e^{-px} dx =$
$= \left[ -\frac{e^{-px}}{p} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$

2/ $\mathcal{L}(\delta) = ?$
$\mathcal{L}(\delta)(p) = \langle \delta, e^{-px} \rangle = e^0 = 1$

3/ $\mathcal{L}(e^{ax} T_H) = ?$
on a $\mathcal{L}(e^{ax} T_H)(p) = \langle e^{ax} T_H, e^{-px} \rangle = \langle T_H, e^{ax} e^{-px} \rangle = \langle T_H, e^{(a-p)x} \rangle$
$= \int_0^{+\infty} e^{(a-p)x} dx = \frac{1}{p-a}$

4/ $\mathcal{L}(\cos x T_H) = ?$
$\mathcal{L}(\cos x T_H)(p) = \langle \cos x T_H, e^{-px} \rangle = \langle T_H, \cos x e^{-px} \rangle =$
$= \int_0^{+\infty} \cos x e^{-px} dx = \mathcal{L}(\cos)(p) = \frac{p}{p^2+1}$

**proposition :**
soit $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une dist qui admet une transformé de Laplace, Alors on a
1/ $\mathcal{L}(T^{(m)})(p) = p^m \mathcal{L}(T)(p)$
2/ $(\mathcal{L}(T)(p))^{(m)} = \mathcal{L}((-x)^m T)(p)$
3/ $\mathcal{L}(S * T)(p) = \mathcal{L}(S)(p) \cdot \mathcal{L}(T)(p)$. $\forall S, T \in \mathcal{D}_+(\mathbb{R})$
4/ $\mathcal{L}(T(x-a))(p) = e^{-ap} \mathcal{L}(T)(p)$
5/ $\mathcal{L}(T(ax))(p) = \frac{1}{|a|} \mathcal{L}(T)(\frac{p}{a})$
6/ $\mathcal{L}(e^{ax} T)(p) = \mathcal{L}(T)(p-a)$

**Dem :**
(2) $(\mathcal{L}(T)(p))^{(m)} = \mathcal{L}((-x)^m T) = \langle (-x)^m T, e^{-px} \rangle = \langle T, (-x)^m e^{-px} \rangle$
$= \langle T, \frac{\partial^m}{\partial p} (e^{-px}) \rangle = \frac{\partial^m}{\partial p} \langle T, e^{-px} \rangle = \frac{\partial^m}{\partial p} (\mathcal{L}(T)(p))$

(3) $\mathcal{L}(S*T)(p) = \langle S*T, e^{-px} \rangle = \langle S_x, \langle T_y, e^{-p(x+y)} \rangle \rangle$
$= \langle S_x \langle T_y, e^{-px} e^{-py} \rangle \rangle = \langle S_x, e^{-px} \rangle \langle T_y, e^{-py} \rangle$
$= \mathcal{L}(S)(p) \cdot \mathcal{L}(T)(p)$

(5) $\mathcal{L}(T(ax))(p) = \langle T(ax), e^{-px} \rangle = \frac{1}{|a|} \langle T, e^{-p(\frac{x}{a})} \rangle$
$= \frac{1}{|a|} \langle T, e^{-\frac{p}{a}x} \rangle = \frac{1}{|a|} \mathcal{L}(T)(\frac{p}{a})$

(4) $\mathcal{L}(T(x-a))(p) = \langle T(x-a), e^{-px} \rangle = \langle T, e^{-p(x+a)} \rangle$
$= \langle T, e^{-px} e^{-pa} \rangle = e^{-pa} \langle T, e^{-px} \rangle$
$= e^{-pa} \mathcal{L}(T)(p)$

(6) $\mathcal{L}(e^{ax} T)(p) = \langle e^{ax} T, e^{-px} \rangle = \langle T, e^{ax} e^{-px} \rangle =$
$\langle T, e^{-(p-a)x} \rangle = \mathcal{L}(T)(p-a)$

(1) $\mathcal{L}(T^{(m)})(p) = \langle T^{(m)}, e^{-px} \rangle = (-1)^m \langle T, (e^{-px})^{(m)} \rangle =$
$(-1)^m \langle T, (-p)^m e^{-px} \rangle = \langle p^m T, e^{-px} \rangle =$
$= p^m \mathcal{L}(T)(p)$.

**exp :**
$\mathcal{L}(\delta') ?$ $\mathcal{L}(\delta')(p) = p \mathcal{L}(\delta)(p) = p \cdot 1 = p$

**App :** Resoudre dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ l'equation diff suivante à l'aide de la TL.
$(E) = T' + 2T + T_H * T = \delta$
$(E) \Leftrightarrow \mathcal{L}(T')(p) + 2\mathcal{L}(T)(p) + \mathcal{L}(T_H * T)(p) = \mathcal{L}(\delta)(p)$
$p\mathcal{L}(T)(p) + 2\mathcal{L}(T)(p) + \mathcal{L}(T_H)(p) \mathcal{L}(T)(p) = 1$
$(p + 2 + \frac{1}{p}) \mathcal{L}(T)(p) = 1$
$\frac{p^2+2p+1}{p}$
$\mathcal{L}(T)(p) = \frac{p}{p^2+2p+1} = \frac{p}{(p+1)^2}$
$\mathcal{L}(T)(p) = \frac{p}{(p+1)^2} = \frac{p+1-1}{(p+1)^2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2}$
$= \frac{1}{p+1} + \left(\frac{1}{p+1}\right)'$
$= \mathcal{L}(e^{-x} T_H)(p) + \left(\mathcal{L}(e^{-x} T_H)(p)\right)'$
$= \mathcal{L}(e^{-x} T_H)(p) + \mathcal{L}(-x e^{-x} T_H)(p)$
$= \mathcal{L}(e^{-x} T_H - x e^{-x} T_H)(p)$
donc $T = e^{-x} T_H - x e^{-x} T_H$

**App 2 :**
1/ Calculer $\mathcal{L}(\sin x T_H)$ et $\mathcal{L}(\cos x T_H)$
2/ En déduire $\mathcal{L}(\sin x T_H * \cos x T_H)$
3/ sans calcule d'integral, Déterminer.
$\sin x T_H * \cos x T_H$
4/ Resoudre :
$(E) : T^{(4)} + 2T'' + T = \delta'$

Scanned with CamScanner

$\int_0^{+\infty} \sin x\, e^{-px}\, dx = \mathcal{L}(\sin x)(p) = \frac{1}{p^2+1}$

$\mathcal{L}(\cos x T_H)(p) = \langle \cos x T_H, e^{-px} \rangle = \langle T_H, \cos x\, e^{-px} \rangle =$
$\int_0^{+\infty} \cos x\, e^{-px}\, dx = \frac{1}{p^2+1}$

2) $\mathcal{L}(\sin x T_H * \cos x T_H)(p) = \mathcal{L}(\sin x T_H)(p)\, \mathcal{L}(\cos x T_H)(p) =$
$\frac{p}{(p^2+1)^2}$

3) $\sin x T_H * \cos x T_H = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{(p^2+1)^2}\right) = \frac{x}{2} \sin x T_H$

avec $\frac{p}{(p^2+1)^2} = -\frac{1}{2} \frac{2p}{(p^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{p^2+1}\right)' = -\frac{1}{2}\left(\mathcal{L}(\sin T_H)(p)\right)'$
$= -\frac{1}{2}\left(-x \sin x T_H\right)(p) = \mathcal{L}\left(\frac{x}{2} \sin T_H\right)(p)$

4) $(E) = T - (\omega) + 2T'' + T = \delta'$

$\Leftrightarrow p^4 \mathcal{L}(T)(p) + 2p^2 \mathcal{L}(T)(p) + \mathcal{L}(T)(p) =$
$\mathcal{L}(\delta')(p) = p\mathcal{L}(\delta)(p) = p$

$\Leftrightarrow (p^4 + 2p^2 + 1)\mathcal{L}(T)(p) = p$

$\mathcal{L}(T)(p) = \frac{p}{p^4+2p^2+1} = \frac{p}{(p^2+1)^2}$

Alors $T = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{(p^2+1)^2}\right) = \frac{x}{2} \sin x T_H$

Scanned with CamScanner

Rp :

1/ $\mathcal{L}(\sin T_H)(p) = \langle \sin T_H, e^{-px} \rangle = \langle T_H, \sin x\, e^{-px} \rangle =$

$\int_0^{+\infty} \sin x\, e^{-px}\, dx = \mathcal{L}(\sin x)(p) = \frac{1}{p^2+1}$

$\mathcal{L}(\cos T_H)(p) = \langle \cos T_H, e^{-px} \rangle = \langle T_H, \cos x\, e^{-px} \rangle =$

$\int_0^{+\infty} \cos x\, e^{-px}\, dx = \frac{p}{p^2+1}$

2) $\mathcal{L}(\sin x\, T_H * \cos x\, T_H)(p) = \mathcal{L}(\sin x\, T_H)(p)\, \mathcal{L}(\cos x\, T_H)(p) =$

$\frac{p}{(p^2+1)^2}$

3) $\sin x\, T_H * \cos x\, T_H = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{(p^2+1)^2}\right) = \frac{x}{2} \sin x\, T_H$

avec $\frac{p}{(p^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\frac{-2p}{(p^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)' = -\frac{1}{2}\left(\mathcal{L}(\sin T_H)(p)\right)'$

$= -\frac{1}{2}\left(-x \sin x\, T_H\right)(p) = \mathcal{L}\left(\frac{x}{2} \sin T_H\right)(p)$

4/ $(E) = T^{(4)} + 2T'' + T = \delta'$

$\Leftrightarrow p^4 \mathcal{L}(T)(p) + 2p^2 \mathcal{L}(T)(p) + \mathcal{L}(T)(p) =$

$\mathcal{L}(\delta')(p) = p\mathcal{L}(\delta)(p) = p$

$\Leftrightarrow (p^4 + 2p^2 + 1)\mathcal{L}(T)(p) = p$

$\mathcal{L}(T)(p) = \frac{p}{p^4+2p^2+1} = \frac{p}{(p^2+1)^2}$

Alors $T = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{(p^2+1)^2}\right) = \frac{x}{2} \sin x\, T_H$

Scanned with CamScanner

# Transformation de la Place

## I Transformée de la Place des fonctions :

### 1- Def et existances :

**Def :** soit $f$ une fct définie sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle transformée de Laplace de $f$. si elle existe, la fonction de la variable complexe $p$ (cad $p \in \mathbb{C}$). notée :

$F(p)$ ou $\mathcal{L}(f(t))(p)$. définie par :

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t))(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

**Rq :**

1/ on appelle $f$ l'original et sa transformée de Laplace est $F$ l'image

2/ pour $t<0$, les valeurs de $f(t)$ n'interviennent pas dans la déf de la transformée de Laplace def, alors on suppose que :

$$f(t) = 0 \text{ , si } t<0$$

- on appelle fonct causale une fonction $f$ tq $f(t)=0$ pour tout $t<0$.
- pour une fonction qq on a : $f(t)$ est causale :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3/ pour $p \in \mathbb{C}$ on a :

$$|f(t)\, e^{-pt}| = |f(t)|\, |e^{-pt}| = |f(t)|\, e^{-\mathrm{Re}(p)t}$$

$p \in D_F \Leftrightarrow \mathrm{Re}(p) \in D_F$

**Théorème :**

soit $f$ une fonctions localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$ supposons que $f$ est d'ordre exponentiel.

(cad : $\exists M>0, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0$ on a : $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$)

Alors la transformé de Laplace def existe pour $p \in \mathbb{C}$ / $\mathrm{Re}(p) > \alpha$

**Def :** On appelle abscisse de convergence absolue def le nombre :

$$p_0 = \inf \{ x \in \mathbb{R} / t \longmapsto f(t)\, e^{-xt} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+ \}$$

**Théorème :** soit $f$ une fonction d'abscisse de conv abso $p_0$, alors la transformée de Laplace def existe

$\forall p \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}(p) > p_0$ (ou $\geq p_0$)

**Rq :** $p_0 \in [-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}$

si $p_0 = -\infty \longrightarrow D_F = \mathbb{C}$

si $p_0 = +\infty \longrightarrow D_F = \emptyset$

si $p_0 \in \mathbb{R} \longrightarrow D_F = \{ p \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}(p) > p_0 \}$

**2/ exemple :**

* $\mathcal{L}(H(t))(p) = ?$

$$\mathcal{L}(1)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt = \left[ -\frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p} \text{ , } \mathrm{Re}(p) > 0$$

$$\lim_{+\infty} |e^{-pt}| = \lim_{+\infty} e^{-\mathrm{Re}(p)t} \xrightarrow[+\infty]{} 0 \quad \mathrm{Re}(p) > 0$$

* $\mathcal{L}(t\, H(t))(p) = \int_0^{+\infty} t\, e^{-pt}\, dt$

ipp $\left\{ \begin{array}{l} t \longrightarrow 1 \\ e^{-pt} \longrightarrow -\frac{e^{-pt}}{p} \end{array} \right\} = \left[ -\frac{t e^{-pt}}{p} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt$

$$= 0 + \frac{1}{p}\, \mathcal{L}(1)(p) = \frac{1}{p^2} \text{ , } \mathrm{Re}(p) > 0$$

* $\mathcal{L}(t^n H(t))(p) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt}\, dt$

$\left\{ \begin{array}{l} t^n \longrightarrow n t^{n-1} \\ e^{-pt} \longrightarrow \frac{e^{-pt}}{p} \end{array} \right\} = \underbrace{\left[ -\frac{t^n e^{-pt}}{p} \right]_0^{+\infty}}_{0} + \frac{n}{p} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-pt}\, dt$

$$= \frac{n}{p} \left( \left[ -\frac{t^{n-1} e^{-pt}}{p} \right]_0^{+\infty} + \frac{(n-1)}{p} \int_0^{+\infty} t^{n-2} e^{-pt}\, dt \right)$$

$$= \frac{n}{p} \cdot \frac{n-1}{p} \int_0^{+\infty} t^{n-2} e^{-pt}\, dt$$

$$\vdots$$

$$= \frac{n}{p} \cdot \frac{n-1}{p} \cdot \frac{(n-2)}{p} \cdots \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt$$

$$= \frac{n!}{p^n} \cdot \frac{1}{p} = \frac{n!}{p^{n+1}} \text{ , } \mathrm{Re}(p) > 0$$

Pour $a \in \mathbb{C}$, $\mathcal{L}(e^{at} H(t))(p) = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-pt}\, dt$

$$= \int_0^{+\infty} e^{t(a-p)}\, dt = \left[ \frac{e^{t(a-p)}}{a-p} \right]_0^{+\infty} ; \quad \mathrm{Re}(a-p) < 0 \quad \mathrm{R}(a) < \mathrm{Re}(p)$$

$$= \frac{1}{p-a} ; \quad \mathrm{Re}(p) > \mathrm{Re}(a)$$

Scanned with CamScanner

# Transformation de la Place

## I Transformée de la Place des fonctions :

### 1- Def et existances :

**Def :** soit $f$ une fct definie sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle transformée de Laplace de $f$. si elle existe, la fonction de la variable complexe $p$ (cad $p \in \mathbb{C}$). notée :

$F(p)$ ou $\mathcal{L}(f(t))(p)$. defini par :

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t))(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

**Rq :**

1/ on appelle $f$ l'original et sa transformée de Laplace est $F$ l'image

2/ pour $t<0$, les valeurs de $f(t)$ n'interviennent pas dans la def de la transformé de Laplace def, alors on suppose que :

$$f(t) = 0 \text{ , si } t<0$$

- on appelle fonct causale une fonction $f$ t.q $f(t)=0$ pour tout $t<0$.
- pour une fonction qq on a : $f(t)$ est causale :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3/ pour $p \in \mathbb{C}$ on a :

$$|f(t)\, e^{-pt}| = |f(t)|\, |e^{-pt}| = |f(t)|\, e^{-\mathrm{Re}(p)t}$$

$$p \in D_F \iff \mathrm{Re}(p) \in D_F$$

**Theoreme :**

soit $f$ une fonctions localement integrable sur $\mathbb{R}_+$ supposons que $f$ est d'ordre exponentiel.

(cad : $\exists M>0, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0$ on a : $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$)

Alors la transformé de Laplace def existe pour $p \in \mathbb{C}$ / $\mathrm{Re}(p) > \alpha$

**Def :** On appelle abcisse de convergence absolue def le nombre :

$$p_0 = \inf \{ x \in \mathbb{R} / t \mapsto f(t) e^{-xt} \text{ est integrable sur } \mathbb{R}_+ \}$$

**Theo :** soit $f$ une fonction d'abscisse de conv absolue $p_0$, alors la transformée de Laplace def existe $\forall p \in \mathbb{C}$ / $\mathrm{Re}(p) > p_0$

**Rq :** $p_0 \in [-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}$

si $p_0$ :
- $= -\infty \longrightarrow D_F = \mathbb{C}$
- $= +\infty \longrightarrow D_F = \emptyset$
- $\{ p \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}(p) > p_0 \}$

### 2/ exemple :

* $\mathcal{L}(H(t))(p) = ?$

$$\mathcal{L}(H)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt = \left[ -\frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}, \quad \mathrm{Re}(p) > 0$$

$$\lim_{+\infty} |e^{-pt}| = \lim_{+\infty} e^{-\mathrm{Re}(p)t} \xrightarrow[+\infty]{} 0 \quad \mathrm{Re}(p) > 0$$

* $\mathcal{L}(t\, H(t))(p) = \int_0^{+\infty} t\, e^{-pt}\, dt$

$$\text{IPP} \begin{cases} t \to 1 \\ e^{-pt} \to -\frac{e^{-pt}}{p} \end{cases} = \left[ -\frac{t e^{-pt}}{p} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt$$

$$= 0 + \frac{1}{p} \mathcal{L}(H)(p) = \frac{1}{p^2}, \quad \mathrm{Re}(p) > 0$$

* $\mathcal{L}(t^m H(t))(p) = \int_0^{+\infty} t^m e^{-pt}\, dt$

$$\begin{cases} t^m \to m t^{m-1} \\ e^{-pt} \to \frac{e^{-pt}}{p} \end{cases} = \underbrace{\left[ -\frac{t^m e^{-pt}}{p} \right]_0^{+\infty}}_{0} + \frac{m}{p} \int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-pt}\, dt$$

$$= \frac{m}{p} \left( \left[ -\frac{t^{m-1} e^{-pt}}{p} \right]_0^{+\infty} + \frac{(m-1)}{p} \int_0^{+\infty} t^{m-2} e^{-pt}\, dt \right)$$

$$= \frac{m}{p} \cdot \frac{m-1}{p} \int_0^{+\infty} t^{m-2} e^{-pt}\, dt$$

$$\vdots$$

$$= \frac{m}{p} \cdot \frac{m-1}{p} \cdot \frac{(m-2)}{p} \cdots \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt$$

$$= \frac{m!}{p^m} \cdot \frac{1}{p} = \frac{m!}{p^{m+1}}, \quad \mathrm{Re}(p) > 0$$

Pour $a \in \mathbb{C}$, $\mathcal{L}(e^{at} H(t))(p) = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-pt}\, dt$

$$= \int_0^{+\infty} e^{t(a-p)}\, dt = \left[ \frac{e^{t(a-p)}}{a-p} \right]_0^{+\infty} ; \quad \mathrm{Re}(a-p) < 0 \quad \mathrm{R}(a) < \mathrm{Re}(p)$$

$$= \frac{1}{p-a} ; \quad \mathrm{Re}(p) > \mathrm{Re}(a)$$

Scanned with CamScanner

$\mathcal{L}(\cos t\, H(t))(p) = \int_0^{+\infty} \cos t\, e^{-pt}\, dt$ ; $Re(p) > 0$

IPP $\begin{cases} \cos t \longrightarrow -\sin t \\ e^{-pt} \longrightarrow -\frac{e^{-pt}}{p} \end{cases}$ $= \left[\frac{-\cos t\, e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-pt}\, dt$

$= \frac{1}{p} - \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-pt}\, dt$

IPP $\begin{cases} \sin t \longrightarrow \cos t \\ e^{-pt} \longrightarrow -\frac{e^{-pt}}{p} \end{cases}$

$= \frac{1}{p} - \frac{1}{p}\cdot\left[\underbrace{\left[-\frac{\sin t\, e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty}}_{0} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} \cos t\, e^{-pt}\, dt\right]$

$= \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\mathcal{L}(\cos t)(p)$ $\quad \frac{p^2+1}{p^2}$

$\Rightarrow \mathcal{L}(\cos t\, H(t))(p)\left[1 + \frac{1}{p^2}\right] = \frac{1}{p}$

$\Rightarrow \mathcal{L}(\cos t\, H(t))(p) = \frac{1}{p}\frac{p^2}{p^2+1} = \frac{p}{p^2+1}$ ; $Re(p) > 0$

$\Rightarrow \mathcal{L}(\sin t\, H(t))(p) = \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} \cos t\, e^{-pt}\, dt = \frac{1}{p}\mathcal{L}(\cos t)(p)$

$= \frac{1}{p}\frac{p}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1}$ ; $Re(p) > 0$

## 3- Lien entre transformé de Laplace et la transformé de Fourier :

Soit $f$ une fct d'abscisse de convergence absolue $p_0$.
(cad : $F(p)$ existe, $\forall p \in \mathbb{C}$, $Re(p) > p_0$)

Dans la fonct,

$t \longmapsto f(t) H(t) e^{-pt}$ est integra sur $\mathbb{R}$ $\forall p / Re(p) > p_0$

Alors :

pour $p = (Re(p) + 2i\pi\omega) \in \mathbb{C}$

ona : $F(\underbrace{Re(p) + 2i\pi\omega}_{p}) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-(Re(p)+2i\pi\omega)t}\, dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) f(t) e^{Re(p)t} e^{-2i\pi\omega t}\, dt$

$= \mathcal{F}\left(f(t)\, e^{-Re(p)t} H(t)\right)(\omega)$

en particulier :

$\mathcal{F}(2i\pi\omega) = \mathcal{F}(f(t) H(t))(\omega)$

$\mathcal{F}(i\omega) = \mathcal{L}(f(t))(i\omega) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) H(t) e^{-2i\pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)t}\, dt$

$= \mathcal{F}(fH)\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$.

dans Pu plus part des exemp... F(p) est dans $\mathbb{R}$ pour cela on prend dans Pa sortie : $p \in \mathbb{R}$ ; $F(p)$

## 4/ Propriétés de la transformée de Lap

P1) $\mathcal{L}((f+g)H)(p) = \mathcal{L}(f)(p) + \mathcal{L}(g)(p)$

$\mathcal{L}(\alpha f)(p) = \alpha\, \mathcal{L}(f)(p)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

exp 1

$\mathcal{L}((1+\cos t) H(t))(p) = \mathcal{L}(1)(p) + \mathcal{L}(\cos t)(p)$

$= \frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2+1}$

P2) ~~$\mathcal{L}(f+g)(t)(p) = \mathcal{L}(f)(p) + \mathcal{L}(g)(p)$~~

~~$\mathcal{L}(\alpha f)(p) = \alpha\, \mathcal{L}(f)(p)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$~~

exemple

~~$\mathcal{L}((1+\cos t) H(t))(p) = \mathcal{L}(1)(p) + \mathcal{L}(\cos t)(p)$~~

$= \frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2+1}$

P2) pour $a \in \mathbb{R}$ : $\mathcal{L}(e^{at} f(t) H(t))(p) = F(p-a)$

$\mathcal{L}(e^{at} f(t))(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{at} e^{-pt}\, dt = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-(p-a)t}\, dt$

$= \mathcal{L}(f(t))(p-a)$

Exp :

- $\mathcal{L}(e^{2t}\cos t)(p) = \mathcal{L}(\cos t)(p-2) = \frac{(p-2)}{(p-2)^2+1}$
- $\mathcal{L}(e^{-3t} t^3)(p) = \mathcal{L}(t^3)(p+3) = \frac{3!}{(p+3)^4}$ ; $p$

P3) soit $a > 0$, $\mathcal{L}(f(at)H)(p) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$

$\mathcal{L}(f(at))(p) = \int_0^{+\infty} f(at) e^{-pt}\, dt$

$= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(y)\, e^{-\frac{p}{a}y}\, dy = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$.

$\frac{p}{a} > p_0$

$\Rightarrow p > p_0 a$

Exp :

- $\mathcal{L}(\cos(\omega t))(p) = \frac{1}{\omega}\mathcal{L}(\cos t)\left(\frac{p}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega}\frac{p/\omega}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2+1}$

$= \frac{p}{p^2+\omega^2}$

- $\mathcal{L}(\sin(\omega t))(p) = \frac{1}{\omega}\mathcal{L}(\sin t)\left(\frac{p}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega}\frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2+1}$

$= \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

Scanned with CamScanner

$F(p)$ est dans $\mathbb{R}$ pour [illegible]

Par suite : $p \in \mathbb{R}$ , $F(p)$

4/ Propriétés de la transformée de Lap

P1) $\mathcal{L}(\lambda f + g)(H)(p) = \lambda \mathcal{L}(f)(p) + \mathcal{L}(g)(p)$

$\mathcal{L}(\alpha f)(p) = \alpha \mathcal{L}(f)(p)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

exp 5

$\mathcal{L}\left((1 + \cos t) H(t)\right)(p) = \mathcal{L}(1)(p) + \mathcal{L}(\cos t)(p)$

$= \frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2+1}$

~~P2) $\mathcal{L}(f+g)(t)(p) = \mathcal{L}(f)(p) + \mathcal{L}(g)(p)$~~

~~$\mathcal{L}(\alpha f)(p) = \alpha \mathcal{L}(f)(p)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$~~

~~exemple 3~~

~~$\mathcal{L}\left((1 + \cos t) 1_{+}(t)\right)(p) = \mathcal{L}(1)(p) \times \mathcal{L}(\cos t)(p)$~~

$= \frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2+1}$

P2) pour $a \in \mathbb{R}$ : $\mathcal{L}(e^{at} f(t) H(t))(p) = F(p-a)$

$\mathcal{L}(e^{at} f(t))(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt$

$= \mathcal{L}(f(t))(p-a)$

Exp :

- $\mathcal{L}(e^{2t} \cos t)(p) = \mathcal{L}(\cos t)(p-2) = \frac{(p-2)}{(p-2)^2+1}$ ; $\boxed{p > 2}$
- $\mathcal{L}(e^{-3t} t^3)(p) = \mathcal{L}(t^3)(p+3) = \frac{3!}{(p+3)^4}$ ; $\boxed{p > -3}$

P3) soit $a > 0$, $\mathcal{L}(f(at))(p) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$

$\mathcal{L}(f(at))(p) = \int_0^{+\infty} f(at) e^{-pt} dt$

$= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(y) e^{-\frac{p}{a} y} dy = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$.

$\frac{p}{a} > p_0 \Rightarrow \boxed{p > p_0 a}$

exp 3

- $\mathcal{L}(\cos(\omega t))(p) = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}(\cos t)\left(\frac{p}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega} \frac{\frac{p}{\omega}}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$
- $\mathcal{L}(\sin(\omega t))(p) = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}(\sin t)\left(\frac{p}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega} \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

$\text{Tp} \begin{cases} \cos t \longrightarrow -\sin t \\ e^{-pt} \longrightarrow \frac{-e^{-pt}}{p} \end{cases} = \left[\frac{-\cos t}{p} e^{-pt}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} \sin t \, e^{-pt} dt$

$= \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} \sin t \, e^{-pt} dt$

$\text{IPP} \begin{cases} \sin t \longrightarrow \cos t \\ e^{-pt} \longrightarrow -\frac{e^{-pt}}{p} \end{cases}$

$= \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \left[\underbrace{\left[-\frac{\sin t \, e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty}}_{0} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} \cos t \, e^{-pt} dt\right]$

$= \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \mathcal{L}(\cos^2)(p)$ $\frac{p^2+1}{p^2}$

$\Rightarrow \mathcal{L}(\cos t \, H(t))(p) \left[1 + \frac{1}{p^2}\right] = \frac{1}{p}$

$\Rightarrow \mathcal{L}(\cos t \, H(t))(p) = \frac{1}{p} \frac{p^2}{p^2+1} = \frac{p}{p^2+1}$ ; $\text{Re}(p) > 0$

$\Rightarrow \mathcal{L}(\sin t \, H(t))(p) = \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} \cos t \, e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \mathcal{L}(\cos t)(p)$

$= \frac{1}{p} \frac{p}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1}$ ; $\text{Re}(p) > 0$

## 3- Lien entre transformé de Laplace et la transformé de Fourier :

soit $f$ une fct d'abscisse de convergance absolue $p_0$.

(cad : $F(p)$ existe, $\forall p \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(p) > p_0$)

Lors la fonct :

$t \longmapsto f(t) H(t) e^{-pt}$ est intégra sur $\mathbb{R}$ $\forall p / \text{Re}(p) > p_0$

Alors :

pour $p = (\text{Re}(p) + 2i\pi\omega) \in \mathbb{C}$

on a : $F(\underbrace{\text{Re}(p) + 2i\pi\omega}_{p}) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(\text{Re}(p) + 2i\pi\omega)t} dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) f(t) e^{\text{Re}(p) t} e^{-2i\pi\omega t} dt$

$= F\left(f(t) e^{-\text{Re}(p) t} H(t)\right)(\omega)$

En particulier :

$F(2i\pi\omega) = F(f(t) H(t))(\omega)$

$F(i\omega) = \mathcal{L}(f(t))(i\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) H(t) e^{-2i\pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)t} dt$

$= F(fH)\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$.

Scanned with CamScanner

Chap 3 :

# Transformation de Fourier

## I) Transformée de Fourier pour les fonctions :

**Déf :**

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on appelle Transformée de fourier de $f$, si elle existe, la fonction notée par :

$\mathcal{F}(f(t))$ ou $\hat{f}$, qui est définie par :

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2i\pi t x}\, dt$$

**RQ :**

1) Si $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, càd si $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt$ C.V

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2i\pi t x}\, dt$ C.V abs et donc

$\mathcal{F}(f)$ existe

2) $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$

**Prop :**

. Si $\mathcal{F}(f)$ existe, alors elle est continue, bornée et tend vers 0 si $x \longrightarrow \pm\infty$

**Exemple :**

Calculer $\mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{[a,b]}(t)\right)(x) = ?$

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$$f(t) = \mathbb{1}_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

: fonction indicatrice

**Solution :**

on a :

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2i\pi t x}\, dt$$

$$= \int_a^b e^{-2i\pi t x}\, dt = \left[\frac{-e^{-2i\pi t x}}{2i\pi x}\right]_a^b, \quad x \neq 0$$



Scanned with CamScanner

$$= \frac{e^{-2i\pi a x} - e^{-2i\pi b x}}{2i\pi x}, \quad x \neq 0$$

$$= \frac{1}{\pi x} e^{-i\pi x(a+b)} \left[ \frac{e^{i\pi x(b-a)} - e^{-i\pi x(b-a)}}{2i} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi x} e^{-i\pi x(a+b)} \sin(\pi x(b-a)), \quad x \neq 0$$

pour $x = 0$, on a :

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_a^b dt = (b-a)$$

Alors :

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi x} e^{-i\pi x(a+b)} \sin(\pi x(b-a)) & \text{si } x \neq 0 \\ b-a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

or

$$\lim_{x \to 0} \left( e^{-i\pi x(b+a)} \frac{\sin(\pi x(b-a))}{\pi x} \right) = (b-a) = \hat{f}(0)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$$

① D'où $\hat{f}$ est prolongeable par continuité en 0 et donc :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\pi x} e^{-i\pi x(a+b)} \sin(\pi x(b-a)) = \mathcal{F}\left[ 1_{[a,b]}(t) \right](x)$$

Cas particulier :

si $g(t) = 1_{[-a,a]}(t)$ alors :

$$\hat{g}(x) = \frac{1}{\pi x} \sin(2a\pi x)$$

Si on prend $a = \frac{1}{2}$ :

$h(t) = 1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t)$ : fonction "porte"

Alors $\hat{h}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$



Scanned with CamScanner

Soit $f$ une fonction integrable sur $\mathbb{R}$

1) Si $f$ est paire, alors :

$$\hat{f}(x) = 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2\pi tx)\,dt$$

2) si $f$ est impair, alors :

$$\hat{f}(x) = -2i\int_0^{+\infty} f(t)\sin(2\pi tx)\,dt$$

Dem :

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-2i\pi tx}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\cos(2\pi tx) - i\sin(2\pi tx)\right]dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(2\pi tx)\,dt - i\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(2\pi tx)\,dt$$

si $f$ est paire :

Alors : $t \longmapsto f(t)\cos(2\pi tx)$ $\overset{\text{paire}}{\Rightarrow}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(2\pi tx)\,dt$

$$= 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2\pi tx)\,dt$$

$t \longmapsto f(t)\sin(2\pi tx)$ $\overset{\text{impair}}{\Rightarrow}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(2\pi tx)\,dt$

$$= 0$$

Alors :

$$F(f(t))(x) = 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2\pi tx)\,dt$$

Exemple :

soit :

$$\Delta(t) = \begin{cases} 1-|t| & \text{si } |t| \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$ : fonction "triangle"

Calculer $\hat{\Delta}(x) = ?$

Solution :

$\Delta$ est paire, alors :

$$\hat{\Delta}(x) = 2\int_0^{+\infty} \Delta(t)\cos(2\pi tx)\,dt = 2\int_0^1 (1-t)\cos(2\pi tx)\,dt$$

IPP $\begin{cases} 1-t \longrightarrow -1 \\ \cos(2\pi tx) \longrightarrow \frac{1}{2\pi x}\sin(2\pi tx) \end{cases}$ ; $x \neq 0$



Scanned with CamScanner

$$\hat{\Delta}(x) = 2\left[(1-t)\frac{\sin(2\pi t x)}{2\pi x}\right]_0^1 + \frac{2}{2\pi x}\left[-\frac{\cos(2\pi t x)}{2\pi x}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\pi x}\cos(2\pi x) \quad \frac{1}{\pi x} - \frac{(1-\cos 2\pi x)}{2\pi x} = \frac{1}{(\pi x)^2}\left(\frac{1-\cos(2\pi x)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{(\pi x)^2}\sin^2(\pi x) = \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2 ; \quad x \neq 0$$

pour $x = 0$ :

$$\hat{\Delta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} \Delta(t)\,dt = 2\int_0^1 (1-t)\,dt = 2\left[t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^1$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2} - 0\right) = 1$$

Alors :

$$\hat{\Delta}(x) = \begin{cases} \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

avec $\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2 = 1 = \hat{\Delta}(0)$

D'où : $\Delta$ est prolongeable par continuité en 0 et on a :

$$\mathcal{F}(\Delta(t))(x) = \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2$$

**Propriétés :** soit $f$ et $g$ 2 fonctions admettant chacune une transformée de Fourier

1) $\mathcal{F}(\alpha f(t) + \beta g(t))(x) = \alpha \mathcal{F}(f(t))(x) + \beta \mathcal{F}(g(t))(x)$

2) pour $a \neq 0$, $\mathcal{F}(f(at))(x) = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{x}{a}\right)$

↳ Dem :

$$\mathcal{F}(f(at))(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at)\, e^{-2i\pi t x}\,dt$$

on pose $y = at$, $dy = a\,dt$

$$= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-2i\pi \frac{y}{a} x}\,dy$$

$$= \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{x}{a}\right)$$



Scanned with CamScanner

Hq si $f$ est paire (resp impaire), alors $\mathcal{F}(f)$ est paire (resp impaire)

Supp : $f(-t) = f(t)$

on a : $\hat{f}(-x) = \mathcal{F}(f(-t))(x) = \mathcal{F}[f(t)](x) = \hat{f}(x)$

3) $\mathcal{F}(f(t-a))(x) = e^{-2i\pi a x}\,\hat{f}(x)$

↳ Dem :

$$\mathcal{F}(f(t-a))(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)\, e^{-2i\pi t x}\, dt$$

on pose $y = t-a$, $dy = dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-2i\pi(y+a)x}\, dy$$

$$= e^{-2i\pi a x}\, \mathcal{F}(f(y))(x)$$

4) Dérivation par rapport à $t$ :

si $f$ est intégrable, dérivable et $f'$ intégrable sur $\mathbb{R}$, alors :

$$\mathcal{F}(f'(t))(x) = (2i\pi x)\,\hat{f}(x)$$

↳ Dem :

$$\mathcal{F}(f'(t))(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\, e^{-2i\pi t x}\, dt$$

IPP : $e^{-2i\pi t x} \longrightarrow -2i\pi x\, e^{-2i\pi t x}$, $f'(t) \longrightarrow f(t)$

$$= \underbrace{\left[f(t)\, e^{-2i\pi t x}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + (2i\pi x)\,\hat{f}(x)$$

Théorèmes

si $f \in L^1$, dérivable et $f' \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\lim_{t \to \pm\infty} f(x) = 0$

$$= (2i\pi x)\,\hat{f}(x)$$

Plus généralement on a :

$$\mathcal{F}(f^{(n)}(t))(x) = (2i\pi x)^n\,\hat{f}(x)$$



Scanned with CamScanner

Dérivation par rapport aux x :

Dém :

$$\left(F(f(t))(x)\right)' = \frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2i\pi t x}\, dt\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (-2i\pi t) f(t)\, e^{-2i\pi t x}\, dt = F\left(-2i\pi t f(t)\right)(x)$$

si $t \longmapsto t^k f(t)$ est intg sur $\mathbb{R}$, $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$

Alors on a :

$$\left(F(f(t))(x)\right)^{(n)} = F\left((-2i\pi t)^n f(t)\right)(x)$$

App :

Soit $f(t) = e^{-at^2}$, $a > 0$

1) Mq $\hat{f}$ vérifie une Equation différentiel

2) En déduire $\hat{f}(x)$

solution :

1) $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(t) = -2at\, e^{-at^2} = -2at f(t)$$

$$\Rightarrow \underbrace{F\left(f'(t)\right)(x)}_{\| \; (2i\pi x)\hat{f}(x)} = \underbrace{F\left((-2at) f(t)\right)(x)}_{n}$$

$$= F\left(\frac{a}{i\pi}(-2i\pi t) f(t)\right)(x)$$

$$= \frac{a}{i\pi} F\left((-2i\pi t) f(t)\right)(x)$$

$$\Rightarrow (2i\pi x)\hat{f}(x) = \frac{a}{i\pi} F\left((-2i\pi t) f(t)\right)(x)$$

$$= \frac{a}{i\pi}\left(\hat{f}(x)\right)'$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{i\pi}\left(\hat{f}(x)\right)' - (2i\pi x)\hat{f}(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\hat{f}(x)\right)' - \frac{i\pi}{a}(2i\pi x)\hat{f}(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\hat{f}(x)\right)' + \frac{2\pi^2}{a} x \hat{f}(x) = 0$$ ; $\hat{f}$ vérifie une EO d'ordre 1 homogène



Scanned with CamScanner

Alors :

$$\hat{f}(x) = K e^{-\int \frac{2\pi^2}{a} x \, dx} \quad ; K \in \mathbb{R}$$

$$= K e^{-\frac{2\pi^2}{a}\frac{1}{2}x^2}$$

$$= K e^{-\frac{\pi^2}{a}x^2}$$

où $K = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt \underset{y=\sqrt{a}t}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{\sqrt{a}} dy$

$dy = \sqrt{a}\, dt$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Rappel : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$

d'où

$$F(e^{-at^2})(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2}{a}x^2} \quad ; a > 0$$

6) soient $f$ et $g$ 2 fonctions intg sur $\mathbb{R}$ tq $(f*g)$ existe Alors :

$$F(f*g)(x) = \hat{f}(x)\hat{g}(x)$$

1ème

$$F(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(t) e^{-2i\pi t x} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(t-y) e^{-2i\pi t x} dy\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-y) e^{-2i\pi t x} dt \right) dy$$

on pose $t - y = z \Rightarrow dz = dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-y) e^{-2i\pi t x} dt\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) e^{-2i\pi (z+y) x} dz\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2i\pi y x} dy \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) e^{-2i\pi z x} dz$$

$$= \hat{f}(x)\, \hat{g}(x)$$



Scanned with CamScanner

Ex 6

1) Calculer $(\Pi * \Pi)(t)$ avec $\Pi(t) = 1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t)$

2) En déduire $F(\Delta) = ?$ où $\Delta(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Sol :

1) $(\Pi * \Pi)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(x)\, \Pi(t-x)\, dx$

avec $\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\Pi(t-x) = \begin{cases} 1 & \text{si } t - \frac{1}{2} \leq x \leq t + \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Notons pour :
$I_1 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et $I_2 = [t - \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2}]$

① Si $t + \frac{1}{2} < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow t < -1 \Rightarrow I_1 \cap I_2 = \emptyset$

$\Rightarrow (\Pi * \Pi)(t) = 0$

② Si $-\frac{1}{2} \leq t + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 0$

$I_1 \cap I_2 = [-\frac{1}{2}, t + \frac{1}{2}]$

$(\Pi * \Pi)(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+t} 1\, dx = t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = t + 1$

③ Si $-\frac{1}{2} \leq t - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1$

$I_1 \cap I_2 = [t - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$(\Pi * \Pi)(t) = \int_{t-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\, dx = 1 - t$

④ Si $t - \frac{1}{2} > \frac{1}{2} \Rightarrow t > 1 \Rightarrow I_1 \cap I_2 = \emptyset$

$\Rightarrow (\Pi * \Pi)(t) = 0$



Scanned with CamScanner

$t - \frac{1}{2} > \frac{1}{2} \Rightarrow t > 1 \Rightarrow I_1 \cap I_2 = \emptyset$

$(\Pi * \Pi)(t) = 0$

Cl :

$$(\Pi * \Pi)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ t+1 & \text{si } -1 < t \leq 0 \\ -t+1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases} = \Delta(t)$$

on sait que $\hat{\Pi}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ Alors $\hat{\Delta}(x) = (\Pi * \Pi)\hat{}(x)$

$= \hat{\Pi}(x)\hat{\Pi}(x) = (\hat{\Pi}(x))^2$

$= \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2$

**Théorème (Formule d'inversion de Fourier) :**

soit $f \in L^1(\mathbb{R}) = \{ f / \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty \}$

$\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$

Alors on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{2i\pi t x} dt = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ : Formule d'inversion de Fourier $\forall x \in \mathbb{R}$

(avec : $f(x^+) = \lim_{t \to x^+} f(t)$, $f(x^-) = \lim_{t \to x^-} f(t)$)

En particulier : Si $f$ est continue en $x$ (ou bien continue sur $\mathbb{R}$)

on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{2i\pi t x} dt = f(x) = F^{-1}(F(f(x)) = F^{-1}(\hat{f})(x)$

$\Leftrightarrow F(\hat{f}(t))(x) = f(-x)$

$\Leftrightarrow$



Scanned with CamScanner

77)

1) Calculer $(\Pi * \Pi)(t)$ avec $\Pi(t) = 1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t)$

2) Caractériser $F(\Delta) = ?$ où $\Delta(t) = \begin{cases} 1-|t| & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Sol:

1) $(\Pi * \Pi)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(x)\, \Pi(t-x)\, dx$

avec $\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\Pi(t-x) = \begin{cases} 1 & \text{si } t-\frac{1}{2} \leq x \leq t+\frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Notons pour : $I_1 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et $I_2 = [t-\frac{1}{2}, t+\frac{1}{2}]$

① si $t+\frac{1}{2} < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow t < -1 \Rightarrow I_1 \cap I_2 = \emptyset$

$\Rightarrow (\Pi * \Pi)(t) = 0$

② si $-\frac{1}{2} \leq t+\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 0$

$I_1 \cap I_2 = [-\frac{1}{2}, t+\frac{1}{2}]$

$(\Pi * \Pi)(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+t} 1\, dx = t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = t+1$

③ si $-\frac{1}{2} \leq t-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1$

$I_1 \cap I_2 = [t-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$(\Pi * \Pi)(t) = \int_{t-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\, dx = 1-t$

④ si $t-\frac{1}{2} > \frac{1}{2} \Rightarrow t > 1 \Rightarrow I_1 \cap I_2 = \emptyset$

$\Rightarrow (\Pi * \Pi)(t) = 0$



Scanned with CamScanner

Si $t - \frac{1}{2} > \frac{1}{2} \Rightarrow t > 1 \Rightarrow I_1 \cap I_2 = \emptyset$

$(\Pi * \Pi)(t) = 0$

Cl :

$$(\Pi * \Pi)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ t+1 & \text{si } -1 < t \leq 0 \\ -t+1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases} = \Delta(t)$$

on sait que $\hat{\Pi}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ Alors $\hat{\Delta}(x) = (\Pi * \Pi)\hat{}(x)$

$$= \hat{\Pi}(x)\hat{\Pi}(x) = \left(\hat{\Pi}(x)\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2$$

Théorème (Formule d'inversion de Fourier) :

soit $f \in L^1(\mathbb{R}) = \{ f / \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty \}$

$\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$

Alors on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{2i\pi t x} dt = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ : Formule d'inversion de Fourier $\forall x \in \mathbb{R}$

(avec : $f(x^+) = \lim_{t \to x^+} f(t)$, $f(x^-) = \lim_{t \to x^-} f(t)$)

En particulier : Si $f$ est continue en $x$ (ou bien continue sur $\mathbb{R}$)

on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{2i\pi t x} dt = f(x) = F^{-1}(F(f(x)) = F^{-1}(\hat{f})(x)$

$\Leftrightarrow F(\hat{f}(t))(x) = f(-x)$

$\Leftrightarrow$



Scanned with CamScanner

## Appz

1) Determiner g tq $\hat{g}(x) = \frac{\sin x}{x}$

2) En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

### Solution :

1) $\mathcal{F}\left(1\!\!1_{[-a,a]}(t)\right)(x) = \frac{\sin(2\pi a x)}{\pi x}$

$\Leftrightarrow \pi \mathcal{F}\left(1\!\!1_{[-a,a]}(t)\right)(x) = \frac{\sin(2\pi a x)}{x}$ pour $a = \frac{1}{2\pi}$

$\mathcal{F}\left(\pi 1\!\!1_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}\right)(x) = \pi \cdot \mathcal{F}\left(1\!\!1_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}(t)\right)(x) = \frac{\sin x}{x}$

Alors : $g(t) = \pi 1\!\!1_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}(t) = \begin{cases} \pi & \text{si } -\frac{1}{2\pi} \leq t \leq \frac{1}{2\pi} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2) on a :

$g(t) = \pi 1\!\!1_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}(t)$

$g \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{g}(x) = \frac{\sin x}{x} \in L^1(\mathbb{R})$

avec la formule d'inversion de Fourier on a :

$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(t)\, e^{2i\pi t x} dt = \frac{g(x^+) + g(x^-)}{2}$

$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{2i\pi t x} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{2\pi} \\ \pi & \text{si } x \in ]-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}[ \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x \in \{-\frac{1}{2\pi}; \frac{1}{2\pi}\} \\ 0 & \text{si } x > \frac{1}{2\pi} \end{cases}$

pour $x = 0$ ;

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = g(0) = \pi$ car $t \longmapsto \frac{\sin t}{t}$ est paire

$\Rightarrow 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$



Scanned with CamScanner

**Théorème** (Formule de Plancherel - Parseval) :

Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R}) = \{f / \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty\}$

Alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)\,\overline{\hat{g}(t)}\,dt$$

avec :

$$\overline{z} = \overline{a+ib} = a - ib$$

Cas particulier :

si $f = g$ on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(t)|^2 dt$$

App :

1) Calculer $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$

Solution :

pour $f = g = \pi \mathbb{1}_{\left[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}\right]}(t)$ on a $\hat{g}(x) = \frac{\sin x}{x}$

Formule de Plancherel - Parseval donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(t)|^2 dt$$

$$\int_{-\frac{1}{2\pi}}^{\frac{1}{2\pi}} \pi^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^2 dt$$

$$\Rightarrow \pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^2 dt$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^2 dt = \pi \overset{\text{paire}}{\Rightarrow} 2\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = \pi$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = \frac{\pi}{2}$$



Scanned with CamScanner

2) Calculer $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 dx$ = ?

pour $f(t) = \Pi(t)$, $g(t) = \Delta(t)$

$\hat{\Pi}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$ ; $\hat{g}(x) = \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2$

avec $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ et $g^m(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$

alors on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t)\Delta(t)\,dt \overset{??}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Pi}(t)\hat{\Delta}(t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t)\Delta(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right)^3 dt$$

$x = \pi t$, $dx = \pi\,dt$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t)\Delta(t)\,dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Delta(t)\,dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \Delta(t)\,dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)\,dt = 2\left[t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 dx = \frac{3\pi}{4 \times 2} = \frac{3\pi}{8}$$

## II) Transformée de Fourier des distributions :

**Déf :** une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dite à décroissance rapide si $\forall K \in \mathbb{N}$ on a :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left| x^K \varphi(x) \right| = 0$$

on note pour $S(\mathbb{R}) = \{\varphi$ de $\varphi^\infty$ avec $\varphi$ et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide $\}$



Scanned with CamScanner

Rappel :

On a :

1) $S(\mathbb{R})$ est un e.v

2) Si $\varphi \in S(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{\varphi} \in S(\mathbb{R})$

3) $S(\mathbb{R})$ est stable par multiplication, dérivée et par polynome

( càd : • $\varphi_1 ; \varphi_2 \in S(\mathbb{R}) \Rightarrow (\varphi_1 \varphi_2) \in S(\mathbb{R})$
• Si $\varphi \in S(\mathbb{R}) \Rightarrow \varphi^{(k)} \in S(\mathbb{R}), \forall k$
• Si $\varphi \in S(\mathbb{R})$ et par polynome $\Rightarrow (P\varphi) \in S(\mathbb{R})$ )

Déf :

on appelle dist tempérée T une forme linéaire et continue de $S(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{K}(=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$

$$T : S(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$\varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle$$

et on note :

$T \in S'(\mathbb{R})$ l'ensemble des dist tempérées
(c'est un s.e.v de $D'(\mathbb{R})$)

Déf :

Toute dist Tempérée T admet une T.F notée par $\hat{T}$ ou $F(T)$, qui est une distribution Tempérée et elle est définie par :

$$\langle F(T), \varphi \rangle = \langle T, F(\varphi) \rangle ; \forall \varphi \in S(\mathbb{R})$$

App :

Calculer $F(\delta)$ ; $F(T_1)$ ; $F(\delta_a)$ ; $F(T_{e^{ixa}})$

Sol :

1) on a : Soit $\varphi \in S(\mathbb{R})$ :

• $\langle F(\delta), \varphi \rangle = \langle \delta, F(\varphi) \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi}(x) \rangle = \hat{\varphi}(0)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = \langle T_1, \varphi \rangle$$

$\Rightarrow F(\delta) = T_1$

(13)

est d'ordre exponentiel, car $\sigma$ :

(20)

Scanned with CamScanner

2) $\langle F(T_1), \varphi \rangle = \langle T_1, F(\varphi) \rangle = \langle T_1, \hat{\varphi}(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(x) e^{2i\pi 0x} dx = \hat{\varphi}(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$

($\varphi$ est continue en 0)

$\Rightarrow F(T_1) = \delta$

3). $\langle F(\delta_a), \varphi \rangle = \langle \delta_a, \hat{\varphi}(x) \rangle = \hat{\varphi}(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-2i\pi ax} dx$

$= \langle T_{e^{-2i\pi ax}}, \varphi \rangle$

$\Rightarrow F(\delta_a) = T_{e^{-2i\pi ax}}$

4) $\langle F(T_{e^{2i\pi ax}}), \varphi \rangle = \langle T_{e^{2i\pi ax}}, \hat{\varphi}(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi ax} \hat{\varphi}(x) dx$

$= \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle$

car $\varphi$ est $\varphi_1$

$\Rightarrow F(T_{e^{2i\pi ax}}) = \delta_a = (\tau_a \delta)$

**RQ:** on definie la Transformée de Fourier inverse, notée par $F^{-1}$, par :

$\langle F^{-1}T, \varphi \rangle = \langle T, F^{-1}(\varphi) \rangle, \varphi \in S(\mathbb{R})$

**App:**

Calculer $F^{-1}(\delta_a)$ ?

**Sol:**

$\langle F^{-1}(\delta_a), \varphi \rangle = \langle \delta_a, F^{-1}(\varphi) \rangle$

$= F^{-1}(\varphi)(a) = \int_{-a}^{+\infty} \varphi(t) e^{2i\pi ta} dt = \langle T_{e^{2i\pi ax}}, \varphi \rangle$

$\Rightarrow F^{-1}(\delta) = T_{e^{2i\pi ax}}$

en particulier: pour $a = 0$

$F^{-1}(\delta) = T_1 \Rightarrow F(F^{-1}(\delta)) = F(T_1)$

$\Rightarrow F(T_1) = \delta$

⚠ $F^{-1}(g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{2i\pi tx} dt$



Scanned with CamScanner

**Prop 6**

Soit $T$ une dist tempérée, Alors on a :

1) $F\left(T^{(k)}\right) = (2i\pi x)^k F(T)$

2) $F(\tau_a T) = e^{-2ia\pi x} F(T)$

3) $F(h_a T) = \frac{1}{|a|}\left(h_{\frac{1}{a}} F(T)\right)$

4) $F\left(e^{2i\pi a x} T\right) = \tau_a\left(F(T)\right)$

5) $\left(F(T)\right)^{(k)} = (-2i\pi)^k F(x^k T)$

**Dém 6**

1) $\langle F(T^{(k)}), \varphi \rangle = \langle T^{(k)}, \hat{\varphi}(x) \rangle$

$= (-1)^k \langle T, (\hat{\varphi}(x))^{(k)} \rangle = (-1)^k \langle T, F\left((-2i\pi x)^k \varphi(x)\right) \rangle$

$= (-1)^k \langle (-2i\pi x)^k F(T), \varphi(x) \rangle = (-1)^k \langle (-2i\pi x)^k F(T), \varphi(x) \rangle$

$\Rightarrow F(T^{(k)}) = (2i\pi x)^k F(T)$

2) $\langle F(\tau_a T), \varphi \rangle = \langle \tau_a T, \hat{\varphi}(x) \rangle = \langle T, \tau_{-a} \hat{\varphi}(x) \rangle$

$= \langle T, \hat{\varphi}(x+a) \rangle = \langle T, \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-2i\pi t(x+a)} dt \rangle$

$= \langle T, \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-2i\pi a t} e^{-2i\pi t x} dt \rangle$

$= \langle T, F\left(e^{-2i\pi a t} \varphi(t)\right)(x) \rangle = \langle F(T), e^{-2i\pi a x} \varphi(x) \rangle$

$= \langle e^{-2i\pi a x} F(T), \varphi \rangle$

3) $\langle h_a T, \varphi \rangle = \frac{1}{|a|} \langle T, h_{\frac{1}{a}} \varphi \rangle$ $\quad (h_a(f)(x) = f(ax))$

$\langle F(h_a T), \varphi \rangle = \langle h_a T, \hat{\varphi}(x) \rangle = \frac{1}{|a|} \langle T, h_{\frac{1}{a}} \hat{\varphi}(x) \rangle$

$= \frac{1}{|a|} \langle T, \hat{\varphi}\left(\frac{x}{a}\right) \rangle$



Scanned with CamScanner

D'autre part on a :

$$\langle h_{\frac{1}{a}} F(T), \varphi \rangle = |a| \langle F(T), \varphi(ax) \rangle$$

$$= |a| \langle T, F[\varphi(ax)](x) \rangle = |a| \langle T, \frac{1}{|a|} \hat{\varphi}\left(\frac{x}{a}\right) \rangle$$

$$= \langle T, \hat{\varphi}\left(\frac{x}{a}\right) \rangle$$

Alors :

$$\langle F(h_a T), \varphi \rangle = \frac{1}{|a|} \langle T, \hat{\varphi}\left(\frac{x}{a}\right) \rangle = \frac{1}{|a|} \langle h_{\frac{1}{a}} F(T), \varphi \rangle$$

$$= \langle \frac{1}{|a|} \left(h_{\frac{1}{a}} F(T)\right), \varphi \rangle$$

4) $\langle F(e^{2i\pi a x} T), \varphi \rangle = \langle e^{2i\pi a x} T, \hat{\varphi}(x) \rangle = \langle T, e^{2i\pi a x} \hat{\varphi}(x) \rangle$

$$= \langle T, \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, e^{-2i\pi t x}\, e^{2i\pi a x}\, dt \rangle = \langle T, \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, e^{-2i\pi x(t-a)}\, dt \rangle$$

on pose $y = t - a$

$$= \langle T, \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y+a)\, e^{-2i\pi x y}\, dy \rangle = \langle T, F[\varphi(y+a)](x) \rangle$$

$$= \langle F(T), \varphi(x+a) \rangle = \langle F(T), \tau_{-a} \varphi \rangle = \langle \tau_a F(T), \varphi \rangle$$

5) $\langle (F(T))^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle F(T), \varphi^{(k)}(x) \rangle = (-1)^k \langle T, F[\varphi^{(k)}(t)](x) \rangle$

$$= (-1)^k \langle T, (2i\pi x)^k \hat{\varphi}(x) \rangle = \langle (-2i\pi x)^k T, \hat{\varphi}(x) \rangle$$

$$= \langle F((-2i\pi x)^k T), \varphi \rangle = (-2i\pi)^k \langle F(x^k T), \varphi \rangle$$

**Propositions**

Soit $T_1$ et $T_2$ 2 dist tempérées et a support bornée alors

$$F(T_1 * T_2) = F(T_1) F(T_2)$$



Scanned with CamScanner

App 8

En utilisant la T.F Mq

1) $\delta' * T = T'$

2) $\delta_a * T = T_a$

Sol 8

1) $F(\delta' * T) = F(\delta') F(T) = (2i\pi x) F(\delta) F(T)$

$= (2i\pi x) T_1 F(T) = (2i\pi x) F(T) = F(T')$

2) $F(\delta_a * T) = F(\delta_a) F(T) = T_{e^{-2i\pi a x}} F(T)$

$= e^{-2i\pi a x} T_1 F(T) = e^{-2i\pi a x} F(T)$

$= F(T_a T)$

$\langle \cdot, 1 \rangle = S\{4$

$\langle T_1, \{4\rangle = S\{4?$

Scanned with CamScanner